

Permutace s opakováním

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou a to v **předem určeném počtu**

– **POČET** všech permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakuji $k_1, k_2, \dots, k_n$ krát, kde $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$, je

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

Příklady

① Kolika způsoby lze 10 dětem rozdat po jednom bonbónu, jestliže máme

a) 2 žluté (Ž), 3 červené (Č) a 5 zelených (Z), záleží na barvě

desetice z 10, Ž se může opakovat 2×, Č 3× a Z 5× – předem určený počet $\Rightarrow$

$$P'(2, 3, 5) = \frac{(2 + 3 + 5)!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2520$$

b) 4 červené a 6 zelených

$$P'(4, 6) = \frac{P(4+6)}{P(4) \cdot P(6)} = \frac{(4+6)!}{4! \cdot 6!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

$$\frac{(10)!}{(10-6)! \cdot 6!} = K(6, 10) = \frac{(10)!}{(10-4)! \cdot 4!} = K(4, 10) = \binom{10}{6} = \binom{10}{4}$$

obecně: $P'(k, n-k) = K(k, n)$

c) všechny různých barev

$$P'(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{10!}{1! \cdot 1! \cdot \dots \cdot 1!} = 10! = P(10)$$

② Ze 7 kuliček, z nichž jsou 4 modré (nerozlišitelné), 1 bílá, 1 červená a 1 zelená, máme vybrat a položit do řady vedle sebe

a) 7 kuliček
$$P'(4, 1, 1, 1) = \frac{(4+1+1+1)!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

b) 5 kuliček

$$[(4M, 1B) \vee (4M, 1Č) \vee (4M, 1Z)] \vee [(3M, 1B, 1Č) \vee (3M, 1B, 1Z) \vee (3M, 1Č, 1Z)] \vee [(2M, 1B, 1Č, 1Z)]$$

$$p = 3P'(4, 1) + 3P'(3, 1, 1) + P'(2, 1, 1, 1)$$

$$p = 3 \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} + 3 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 1!} + \frac{5!}{2!} = 15 + 60 + 60 = 135$$

③ Určete počet všech pěticičerných přirozených čísel, jež lze sestavit z číslic 5 a 7, má-li být v každém z nich číslice 5

a) právě 3krát $3 \times$ číslo 5 $\Rightarrow$ musí být $2 \times$ číslo 7
$$p = P'(3, 2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

b) nejvýše 3krát

$$[0 \times 5, 5 \times 7 \text{ (pouze 77 777)}] \text{ nebo } [1 \times 5, 4 \times 7] \text{ nebo } [2 \times 5, 3 \times 7] \text{ nebo } [3 \times 5, 2 \times 7]$$

$$p = 1 + P'(1, 4) + P'(2, 3) + P'(3, 2) = 1 + \frac{5!}{1! \cdot 4!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$$

c) aspoň 3krát

$$[3 \times \text{číslo } 5, 2 \times \text{číslo } 7] \text{ nebo } [4 \times \text{číslo } 5, 1 \times \text{číslo } 7] \text{ nebo } [5 \times \text{číslo } 5, 0 \times \text{číslo } 7]$$

$$p = P'(3, 2) + P'(4, 1) + P'(5, 0) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{4! \cdot 1!} + \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 10 + 5 + 1 = 16$$

- ④ Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci a 8 pěšáků) 16 figurek na 16 polí [1×K, 1×D, 2×V, 2×J, 2×S, 8×P]
a) na 2 pevně zvolené řady šachovnice 8×8

$$p = P'(1, 1, 2, 2, 2, 8) = \frac{(1+1+2+2+2+8)!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 8!} = \frac{16!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 8!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8!}$$

$$p = 64\,864\,800$$

- b) na libovolné dvě řady šachovnice 8×8

nejprve vybereme 2 lib. řady z 8 (nezál. na poř.) a pak umístíme figurky jako a)

$$p = K(2, 8) \cdot P'(1, 1, 2, 2, 2, 8)$$

$$p = \binom{8}{2} \cdot \frac{16!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 8!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8!} = 1\,816\,214\,400$$

- ⑤ Poznáte zprávu Gaia Julia Caesara zaslanou do Říma po vítězství nad pontským králem Farnakem, která se skrývá v anagramu CDEIIIIINVVV? Kolika způsoby v ní lze přemístit písmena? [C 1×, D 1×, E 1×, I 5×, N 1×, V 3× (celkem 12 písmen)]

$$p = P'(1, 1, 1, 5, 1, 3) = \frac{(1+1+1+5+1+3)!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 5! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{12!}{5! \cdot 3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2} = 665\,280$$

[VENI, VIDI, VICI (přišel jsem, viděl jsem, zvítězil jsem)]

- ⑥ V anagramu AABIKKMNOORT, resp. MINIKABAROTOK, je zašifrováno slovo KOMBINATORIKA. Určete počet anagramů, které lze vytvořit.

[A 2×, B 1×, I 2×, K 2×, M 1×, N 1×, O 2×, R 1×, T 1× (celkem 13 písmen)]

$$p = P'(2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1) = \frac{(2+1+2+2+1+1+2+1+1)!}{2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 389\,188\,800$$

- ⑦ Určete

- a) počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA

[5×A, 2×B, 1×D, 1×K, 2×R]

$$p = P'(5, 2, 1, 1, 2) = \frac{(5+2+1+1+2)!}{5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 83\,160$$

- b) v kolika z nich žádná dvojice sousedních písmen není tvořena dvěma písmeny A

nemají-li být 2 A vedle sebe $\Rightarrow$ každé z 5ti A musí být na některém ze 7 $\square$ (uvaž. kraj i konec) $\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square$

[pokud $\square$ neobsahuje A (máme jen 5×A), vynecháme písmeno]

$\Rightarrow$ 5 A na 7 $\square$ (nez. na poř.) lze vybrat $K(5, 7)$ zp. a zbývajících 6 písmen ze 4 (2×B, 2×R, 1×D, 1×K) umístěných na tečkách lze vybrat $P'(2, 2, 1, 1)$ zp.

$$p = K(5, 7) \cdot P'(2, 2, 1, 1) = \binom{7}{5} \cdot \frac{(2+2+1+1)!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \binom{7}{2} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} = 3\,780$$

- c) v kolika z nich žádná pětice sousedních písmen není tvořena pěti písmeny A

počet všech – počet, kdy 5 A je vedle sebe (pětici A bereme jako jedno písmeno)

$\bullet \cdots \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \cdots \bullet$ (1×A, 2×B, 2×R, 1×D, 1×K)

$$p = P'(5, 2, 1, 1, 2) - P'(1, 2, 1, 1, 2) = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} - \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 81\,900$$